

ウルトラフィルターとStone-Čechコンパクト化の構造

ウルトラフィルターとStone-Čechコンパクト化に関する圏論的および位相空間論的な構造について、順を追って詳細に解説します。

1. ウルトラフィルターモナドの構造と証明

定義（フィルターとウルトラフィルター）

集合 X 上のフィルター \mathcal{F} とは、冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合で、以下の3条件を満たすものです。

- $X \in \mathcal{F}$ かつ $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subseteq B \subseteq X \implies B \in \mathcal{F}$

ウルトラフィルターとは、包含関係に関して極大であるフィルターのことで、同値な条件として、「任意の $A \subseteq X$ に対して、 $A \in \mathcal{F}$ または $X \setminus A \in \mathcal{F}$ のいずれか一方が必ず成り立つ」ことが挙げられます。集合 X 上のウルトラフィルター全体の集合を βX と表記します。

例 $X = \mathbb{N}$ （自然数全体の集合）とします。

- 単項フィルター (principal filter)** : 特定の元 $n \in \mathbb{N}$ を固定し、

$\mathcal{F}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n \in A\}$ とします。これはウルトラフィルターです。

- **自由フィルター (free filter)** : 補集合が有限であるような部分集合全体 \mathcal{F}_{cof} (補有限フィルター) はフィルターですが、ウルトラフィルターではありません。Zornの補題を用いればこれを拡張したウルトラフィルターが存在することが証明できますが、具体的に書き下すことは不可能です。

1.1 関手構造 βf

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、写像 $\beta f: \beta X \rightarrow \beta Y$ を次のように定義します。

$$\beta f(\mathcal{F}) = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\} \quad (\mathcal{F} \in \beta X)$$

証明 well-definedである ($\beta f(\mathcal{F})$ が Y 上のウルトラフィルターになる) こ

との証明:

$\mathcal{G} = \beta f(\mathcal{F})$ とおきます。

1. $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{F}$ より $Y \in \mathcal{G}$ 。 $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \notin \mathcal{F}$ より $\emptyset \notin \mathcal{G}$ 。
2. $B_1, B_2 \in \mathcal{G}$ ならば、 $f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2) \in \mathcal{F}$ 。 \mathcal{F} はフィルターなので $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{F}$ 。 ゆえに $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{G}$ 。
3. $B \in \mathcal{G}$ かつ $B \subseteq C \subseteq Y$ ならば、 $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ かつ $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(C)$ 。 よって $f^{-1}(C) \in \mathcal{F}$ となり $C \in \mathcal{G}$ 。
4. 任意の $B \subseteq Y$ について、 $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ です。 \mathcal{F} はウルトラフィルターなので、 $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ または $X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ のいずれかが成り立ちます。したがって、 $B \in \mathcal{G}$ または $Y \setminus B \in \mathcal{G}$ となり、 \mathcal{G} は極大性を満たします。

1.2 モナド構造 η_X と μ_X

単位射 $\eta_X: X \rightarrow \beta X$ の定義:

各 $x \in X$ に対して、 $\eta_X(x) = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ とします (前述の単項ウルトラフィルター)。

乗法射 $\mu_X: \beta\beta X \rightarrow \beta X$ の定義:

$\mathcal{U} \in \beta\beta X$ (βX 上のウルトラフィルター) とします。任意の $A \subseteq X$ に対して、 $A^* = \{\mathcal{F} \in \beta X \mid A \in \mathcal{F}\}$ と表記することにします。

$$\mu_X(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X \mid A^* \in \mathcal{U}\}$$

証明 well-definedである ($\mu_X(\mathcal{U})$ が X 上のウルトラフィルタになる) こ

との証明：

$\mathcal{H} = \mu_X(\mathcal{U})$ とおきます。

1. $X^* = \{\mathcal{F} \in \beta X \mid X \in \mathcal{F}\} = \beta X$ 。 $\beta X \in \mathcal{U}$ より $X \in \mathcal{H}$ 。 $\emptyset^* = \emptyset \notin \mathcal{U}$ より $\emptyset \notin \mathcal{H}$ 。

2. $A, B \in \mathcal{H} \implies A^*, B^* \in \mathcal{U}$ 。 ここで

$A^* \cap B^* = \{\mathcal{F} \mid A \in \mathcal{F} \text{ かつ } B \in \mathcal{F}\} = (A \cap B)^*$ 。 \mathcal{U} はフィルタなので $(A \cap B)^* \in \mathcal{U}$ 、よって $A \cap B \in \mathcal{H}$ 。

3. $A \in \mathcal{H}$ かつ $A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*$ ($A \in \mathcal{F}$ ならば $B \in \mathcal{F}$ だから)。

$A^* \in \mathcal{U}$ より $B^* \in \mathcal{U}$ 、よって $B \in \mathcal{H}$ 。

4. 任意の $A \subseteq X$ について、 \mathcal{F} がウルトラフィルタであるため

$(X \setminus A)^* = \beta X \setminus A^*$ となります。 \mathcal{U} もウルトラフィルタなので、 $A^* \in \mathcal{U}$ または $\beta X \setminus A^* \in \mathcal{U}$ のいずれかが成り立ちます。よって $A \in \mathcal{H}$ または $X \setminus A \in \mathcal{H}$ となります。

1.3 モナドの公理の証明

証明 (1) 左単位律 $\mu_X \circ \eta_{\beta X} = id_{\beta X}$:

任意の $\mathcal{F} \in \beta X$ をとります。 $\eta_{\beta X}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{V} \subseteq \beta X \mid \mathcal{F} \in \mathcal{V}\} \in \beta \beta X$ です。

$\mu_X(\eta_{\beta X}(\mathcal{F})) = \{A \subseteq X \mid A^* \in \eta_{\beta X}(\mathcal{F})\} = \{A \subseteq X \mid \mathcal{F} \in A^*\} = \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$ 。

(2) 右単位律 $\mu_X \circ \beta(\eta_X) = id_{\beta X}$:

$\mathcal{F} \in \beta X$ をとります。 $\beta(\eta_X)(\mathcal{F}) = \{\mathcal{V} \subseteq \beta X \mid \eta_X^{-1}(\mathcal{V}) \in \mathcal{F}\}$ です。

ここで $A^* \in \beta(\eta_X)(\mathcal{F}) \iff \eta_X^{-1}(A^*) \in \mathcal{F}$ ですが、

$\eta_X^{-1}(A^*) = \{x \in X \mid \eta_X(x) \in A^*\} = \{x \in X \mid A \in \eta_X(x)\} = \{x \in X \mid x \in A\} = A$ となります。

よって $A^* \in \beta(\eta_X)(\mathcal{F}) \iff A \in \mathcal{F}$ となり、

$\mu_X(\beta(\eta_X)(\mathcal{F})) = \{A \subseteq X \mid A \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$ が示されます。

(3) 結合律 $\mu_X \circ \mu_{\beta X} = \mu_X \circ \beta(\mu_X)$:

$\mathcal{U} \in \beta\beta\beta X$ とします。

左辺は $(\mu_X \circ \mu_{\beta X})(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X \mid (A^*)^{**} \in \mathcal{U}\}$ (ただし $\mathcal{V}^{**} = \{\mathcal{U} \in \beta\beta X \mid \mathcal{V} \in \mathcal{U}\}$) となります。

右辺は $(\mu_X \circ \beta(\mu_X))(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X \mid \mu_X^{-1}(A^*) \in \mathcal{U}\}$ となります。

ここで任意の $\mathcal{U} \in \beta\beta X$ に対して、

$\mathcal{U} \in \mu_X^{-1}(A^*) \iff \mu_X(\mathcal{U}) \in A^* \iff A \in \mu_X(\mathcal{U}) \iff A^* \in \mathcal{U} \iff \mathcal{U} \in (A^*)^{**}$
が成り立つため、両者は一致します。

2. βX の位相と極度不連結コンパクト Hausdorff 空間

位相の定義と clopen 性:

βX 上の位相を、部分集合族 $\{A^* \mid A \subseteq X\}$ を開基として定めます。

$A^* \cap B^* = (A \cap B)^*$ と $X^* = \beta X$ を満たすためこれは開基となります。

また、任意の $A \subseteq X$ について $\beta X \setminus A^* = (X \setminus A)^*$ であり、 $(X \setminus A)^*$ も開基の元なので開集合です。したがって、 A^* は開かつ閉、すなわち **clopen** な集合です。

証明 像の稠密性の証明:

X の像は $\eta_X(X)$ です。 βX の任意の空でない開集合は、ある $A \neq \emptyset$ に対する基本開集合 A^* を含みます。 $x \in A$ を一つ選ぶと、 $A \in \eta_X(x)$ より $\eta_X(x) \in A^*$ となります。任意の開集合が $\eta_X(X)$ の元を含むため、 $\eta_X(X)$ は稠密です。

Hausdorff 性の証明:

$\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ なる異なるウルトラフィルターをとります。互いに極大なので、ある $A \in \mathcal{F}$ が存在して $A \notin \mathcal{G}$ 、すなわち $X \setminus A \in \mathcal{G}$ となります。

このとき $\mathcal{F} \in A^*$ かつ $\mathcal{G} \in (X \setminus A)^*$ です。 A^* と $(X \setminus A)^*$ は共通部分が $\emptyset^* = \emptyset$ となる互いに素な開集合であるため、 βX は Hausdorff です。

コンパクト性の証明:

基本開集合の族 $\{A^* \mid A \subseteq X\}$ を準開基とし、Alexander の準開基の定理を用います。

$\beta X = \bigcup_{i \in I} A_i^*$ と被覆されたとし、有限部分被覆を持たないと仮定します。すると任意の有限部分集合 $J \subseteq I$ に対して $\bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)^*$ が空でない、すなわち $\bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \neq \emptyset$ です。

これは $\{X \setminus A_i \mid i \in I\}$ が有限交叉性を持つことを意味します。これを生成系とするウルトラフィルター \mathcal{U} が存在しますが、このとき任意の i について $X \setminus A_i \in \mathcal{U}$ となるため、 $\mathcal{U} \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)^* = \bigcap_{i \in I} (\beta X \setminus A_i^*)$ となり、 $\bigcup_{i \in I} A_i^*$ が βX 全体を被覆していることに矛盾します。よってコンパクトです。

極度不連結性の証明：

位相空間が極度不連結であるとは、任意の開集合の閉包が開集合になることです。

$U \subseteq \beta X$ を任意の開集合とし、開基の和として $U = \bigcup_{i \in I} A_i^*$ と表します。

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ とおきます。

$A_i^* \subseteq A^*$ であり、 A^* は閉集合なので $\bar{U} \subseteq A^*$ です。

逆に、 $\mathcal{F} \notin \bar{U}$ とすると、 $\mathcal{F} \in B^*$ かつ $B^* \cap U = \emptyset$ となる開傍受 B^* があります。 $B^* \cap A_i^* = \emptyset \implies B \cap A_i = \emptyset$ がすべての i で成り立つため、 $B \cap A = \emptyset$ 、すなわち $B^* \cap A^* = \emptyset$ です。

$\mathcal{F} \in B^*$ なので $\mathcal{F} \notin A^*$ となり、 $A^* \subseteq \bar{U}$ が示されます。結果として $\bar{U} = A^*$ となり、閉包は clopen な開基に一致し開集合となります。

3. フィルターの収束とコンパクト Hausdorff 性の同値性

フィルターの収束の定義：

位相空間 Y と Y 上のフィルター \mathcal{F} 、点 $y \in Y$ に対して、 \mathcal{F} が y に**収束する** ($\mathcal{F} \rightarrow y$ と書く) とは、 y の任意の開傍受 V に対して、 $V \in \mathcal{F}$ となることです。

3.1 Hausdorff 性と収束先の一意性

証明 (\implies) の証明: Y が Hausdorff とし、 \mathcal{F} が異なる2点 y, z に収束したと

します。Hausdorff性より $V_y \cap V_z = \emptyset$ なる開傍受が存在します。収束の定義から $V_y \in \mathcal{F}$ かつ $V_z \in \mathcal{F}$ ですが、フィルターの性質により $V_y \cap V_z = \emptyset \in \mathcal{F}$ となり矛盾します。

(\Leftarrow) の証明: 対偶を示します。 Y が Hausdorff でないとすると、相異なる y, z の任意の開傍受 V_y, V_z に対して $V_y \cap V_z \neq \emptyset$ となります。族 $\{V_y \cap V_z\}$ は有限交叉性を持つため、これを生成系として拡張したウルトラフィルター \mathcal{F} が存在します。構成から \mathcal{F} は y, z 両方のすべての開傍受を含むため、 $\mathcal{F} \rightarrow y$ かつ $\mathcal{F} \rightarrow z$ となり一意性が崩れます。

3.2 コンパクト性と収束先の存在

証明 (\Rightarrow) の証明: Y がコンパクトとし、ウルトラフィルター \mathcal{F} がどの点

にも収束しないと仮定します。各 $y \in Y$ に対して開傍受 $V_y \notin \mathcal{F}$ が存在し、 \mathcal{F} の極大性から $Y \setminus V_y \in \mathcal{F}$ です。 $\{V_y\}$ は開被覆となるため、コンパクト性より有限部分被覆 $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$ を持ちます。ド・モルガンの法則から

$\bigcap_{i=1}^n (Y \setminus V_{y_i}) = \emptyset$ となりますが、各 $Y \setminus V_{y_i}$ は \mathcal{F} に属するため有限交叉性により $\emptyset \in \mathcal{F}$ となり矛盾します。

(\Leftarrow) の証明: 対偶を示します。 Y がコンパクトでないとすると、有限部分被覆を持たない開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ が存在します。すなわち閉集合族 $\{Y \setminus U_i\}$ は有限交叉性を持ち、これを含むウルトラフィルター \mathcal{F} が作れます。もし $\mathcal{F} \rightarrow y$ となると、被覆であるため $y \in U_{i_0}$ なる U_{i_0} があり $U_{i_0} \in \mathcal{F}$ となります。一方で構成から $Y \setminus U_{i_0} \in \mathcal{F}$ なので $\emptyset \in \mathcal{F}$ となり矛盾。よって収束しないウルトラフィルターが存在します。

4. βX におけるウルトラフィルターの収束とモナド乗法

任意のウルトラフィルター $\mathcal{U} \in \beta\beta X$ に対して、モナドの乗法 $\mu_X(\mathcal{U})$ が \mathcal{U} の βX におけるただ一つの収束先になることを示します。

証明 βX はコンパクトHausdorff空間であるため、前節の同値性により

$\mathcal{U} \in \beta\beta X$ は βX 内のただ一つの元に収束します。その収束先が $\mathcal{F} = \mu_X(\mathcal{U})$ と一致することを示します。

$\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$ を示すには、位相空間 βX における \mathcal{F} の任意の開傍受 \mathcal{O} に対して、 $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$ となることを示せば十分です。

βX の開基は $\{A^*\}$ なので、 \mathcal{O} はある基本開集合 A^* を含み、 $\mathcal{F} \in A^* \subseteq \mathcal{O}$ を満たすように取れます。

$\mathcal{F} \in A^*$ ということは、定義から $A \in \mathcal{F}$ です。

ここで $\mathcal{F} = \mu_X(\mathcal{U}) = \{A \subseteq X \mid A^* \in \mathcal{U}\}$ の定義を用いると、

$A \in \mathcal{F} \iff A^* \in \mathcal{U}$ が成り立ちます。

したがって $A^* \in \mathcal{U}$ となります。 \mathcal{U} はフィルターであり $A^* \subseteq \mathcal{O}$ であるから、条件より $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$ となります。

これは収束の定義を満たしており、 βX はHausdorffであるため、 $\mu_X(\mathcal{U})$ が唯一の収束先であることが証明されました。

まとめ

本解説では、集合 X からそのウルトラフィルターの空間 βX を構成するプロセスが、圏論的な**モナド**を形成することを証明しました。さらに βX に適切な開基を導入することで、それが元の集合の像を稠密に含む**極度不連結なコンパクトHausdorff空間** (Stone-Čechコンパクト化) となることを確認しました。

最後に「コンパクトHausdorff性」が「ウルトラフィルターの一意的な収束」と同値であることを示し、モナドの乗法射 μ_X が、 $\beta\beta X$ の元 (ウルトラフィルター上のウルトラフィルター) を「その位相的な収束先へ対応させる写像」として完全に一致することを明らかにしました。代数・圏論的構造 (モナド) と位相的構造 (コンパクト化と収束) が完璧に符合する美しい数学的帰結です。

用語に関する注意:

- Stone-Čechとclopenはそのままの綴りでカタカナにしない。
- 人の名前もカタカナにしない。